Université Paul Sabatier
Licence STS – Parcours PC – L1 physique

Thèmes 11 et 12 : Ondes

2009–2010, durée : 6 h

A – Questions de cours

I. Équation de D'Alembert

Équation des ondes à une dimension. Solution générale. Exemples de systèmes physiques.

II. Ondes stationnaires

Équation des ondes à une dimension. Ondes stationnaires : forme des solutions et interprétation.

III. Ondes sinusoïdales

Équation des ondes à une dimension. Ondes progressives sinusoïdales : forme des solutions. Pulsation, période, fréquence, longueur d'onde, nombre d'onde, vecteur d'onde ; relations entre ces diverses grandeurs.

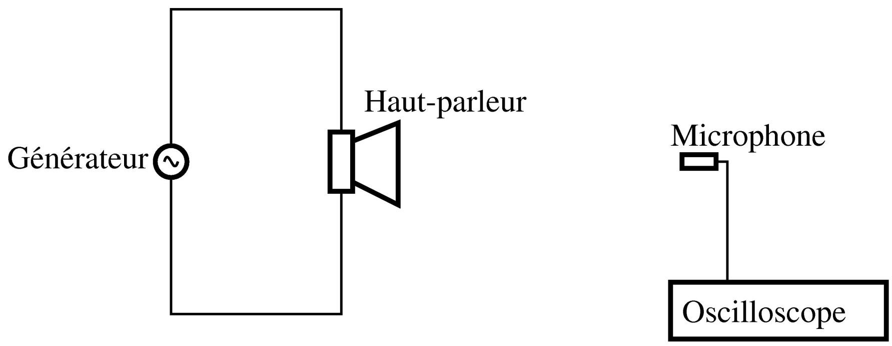

FIG. 1 – Schéma du montage pour l'exercice B.1

B – Les ondes et leur équation

Exercice 1

On considère le montage suivant :
Un générateur sinusoïdal alimente un haut-parleur qui crée une onde sonore (Fig. 1). On supposera que l'onde sonore est à une dimension entre le haut-parleur et le microphone, situé à une distance x du haut-parleur. Le signal capté par le microphone est visualisé sur un oscilloscope (Fig. 2). La base de temps est réglée à 10 μs par division.

1) Quelle est la fréquence de l'onde ? Évaluer une incertitude.
2) Interpréter les phases successives des traces de la figure 2. En déduire la longueur d'onde.
3) Déduire la vitesse du son dans l'air le jour des mesures, avec son incertitude. Que proposeriez-vous pour améliorer la précision de ces mesures ?

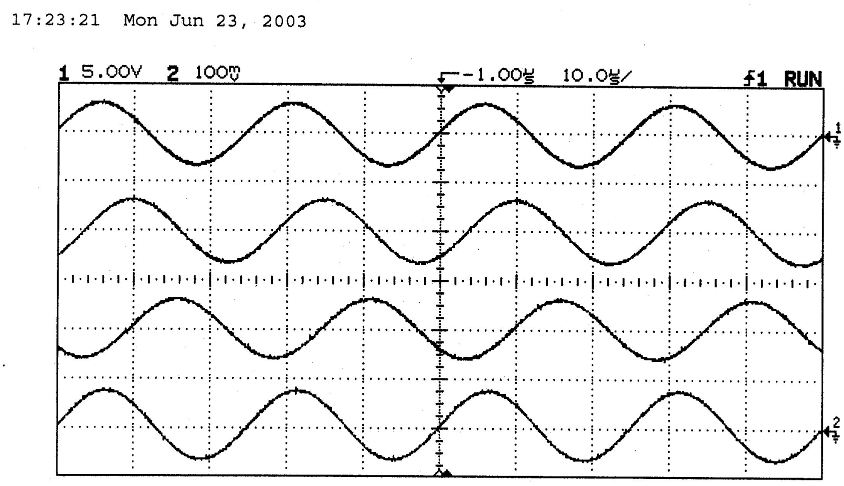

FIG. 2 – Signal capté par le microphone. La trace supérieure a été enregistrée à une distance x = 20,00 $\pm$ 0,05 cm du haut-parleur. La trace inférieure correspond à une distance x de 20,84 $\pm$ 0,05 cm. Les deux traces intermédiaires correspondent à des distances intermédiaires.

Exercice 2

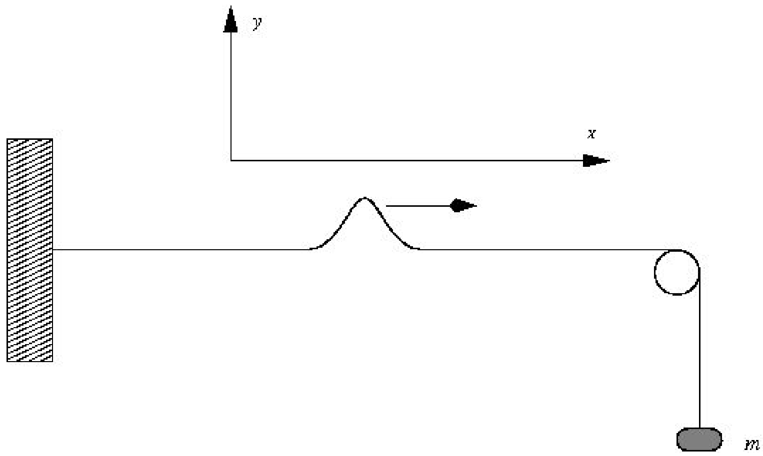

FIG. 3 – Schéma de la corde pour les exercices B.2 et C.1. L'extrémité de gauche est fixée à un mur, celle de droite passe sur une poulie et supporte une masse, ce qui permet de considérer que la tension de la corde est constante et égale à mg.

On considère une corde tendue comme sur la Figure 3. La masse vaut $m = 1$ kg. On prendra $g = 9,81$ m.s^{-2}. On note $y(x,t)$ le déplacement de la corde par rapport à sa position au repos. On peut démontrer que la vitesse de propagation des ondes est $v = \sqrt{T/\mu}$, où $T = mg$ est la tension de la corde et $\mu = 50$ g.m^{-1} est la masse par unité de longueur de la corde.

1) Quelle est la vitesse de propagation de l'onde ?

À l'instant $t = 0$, on observe une impulsion de la forme :

$$y(x,0) = a \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right)$$

où $a = 5$ cm et $b = 10$ cm sont deux longueurs données.

2) Pourquoi ne peut-on conclure sur la forme de l'impulsion à $t \neq 0$? Que faudrait-il connaître en plus pour cela ?

3) On suppose que l'onde se déplace vers la droite. Donner la forme de l'impulsion pour $t \neq 0$. Pouvez-vous définir une longueur d'onde ? Que faudrait-il pour cela ?
4) Dans une autre expérience, en plus de l'impulsion précédente que l'on notera $y_1(x,t)$, une autre impulsion $y_2(x,t)$ de même forme mais avec une amplitude opposée ($a_2 = -a_1$), se déplace vers la gauche. Donner la forme générale de $y_2(x,t)$. En déduire celle du déplacement $y(x,t)$ dû aux deux impulsions. Que pensez-vous de la fonction $y(x,0)$ au temps $t = 0$? Cela vous étonne-t-il ?

C – Ondes stationnaires

Exercice 1

On reprend la corde de l'exercice B.2 : un opérateur situé près de la poulie crée une onde de fréquence $f = 10$ Hz se déplaçant vers la gauche et de la forme :

$$y_1(x,t) = a\cos(\omega t + kx)$$

1) Exprimer ω et k en fonction de f et v, la vitesse de propagation de l'onde.
2) L'extrémité de la corde fixée au mur au point d'abscisse x_0 ne peut pas bouger, c'est-à-dire que l'on a $y(x_0,t) = 0$ quel que soit le temps t. Montrer que cette dernière condition est incompatible avec le fait que l'on ait seulement une onde se déplaçant vers la gauche.
3) On cherche donc une solution de l'équation des ondes avec une onde qui se déplace vers la droite en plus de l'onde initiale :
$$y(x,t) = a\cos(\omega t + kx) + g(t - x/v)$$
où $g(u)$ est une fonction d'une variable à déterminer. En écrivant que $y(x_0,t) = 0$, montrer que $g(t - x/v)$ représente une onde progressive sinusoïdale de même fréquence que y_1 et donner l'expression de g.
4) Montrer que l'onde obtenue est une onde stationnaire et donner son expression. Quelle est la distance entre le point x_0 et le premier nœud ?

Exercice 2

On va chercher toutes les solutions de l'équation des ondes qui sont des ondes stationnaires c'est-à-dire de la forme $y(x,t) = f(x)g(t)$.
1) Montrer que l'équation des ondes s'écrit alors :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} \tag{1}$$

2) Comme l'équation (1) doit être vérifiée pour tout x et tout t, on va d'abord fixer $t = 0$. En déduire que :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = C \tag{2}$$

où C est une constante indépendante de x et t. Déduire alors que :

$$\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = Cv^2 \tag{3}$$

3) Trouver les solutions générales de (2) et (3). On veut que $y(x,t)$ reste fini pour toutes les valeurs de x et t. Montrer que cela impose que C soit négatif.
4) En déduire la forme la plus générale d'une onde stationnaire. On pourra poser $C = -k^2$ et $\omega = kv$.

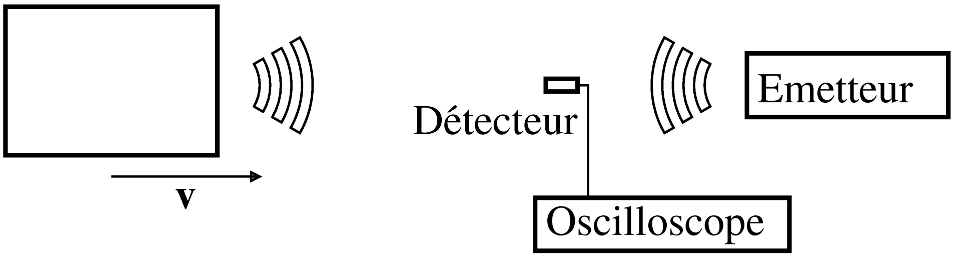

FIG. 4 – Schéma d'un radar Doppler

Exercice 3 : principe du radar Doppler

Un « radar » servant à mesurer la vitesse des voitures fonctionne sur le principe suivant : Un émetteur envoie une onde (qui sera supposée plane dans la suite) vers l'objet dont on veut mesurer la vitesse. Celui-ci réfléchit l'onde. L'onde réfléchie sera aussi supposée plane. On a donc une onde « stationnaire » entre l'émetteur et le réflecteur, dont les nœuds se déplacent à la vitesse **V** du véhicule. Le détecteur est sensible à l'onde stationnaire ainsi formée (somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie).

1) La fréquence de l'onde émise par l'émetteur est $f = 1$ GHz, la pulsation est notée ω et la vitesse de l'onde est $c = 3 \times 10^8$ m.s^{-1}. Quelle est la longueur d'onde ?
2) On suppose que le réflecteur est tel qu'il impose que l'onde soit nulle sur sa surface. La position du réflecteur est $x_1 = Vt$. En refaisant un raisonnement analogue à celui de l'exercice C.1.3), montrer que l'onde réfléchie est de la forme $g(x,t) = -a\cos(\omega' t - k' x)$ où a est l'amplitude de l'onde incidente. Calculer ω' en fonction de ω, V et c.
3) Le détecteur est à la position x_0. Quelle est la forme temporelle du signal reçu sur le détecteur ? On mettra ce résultat sous la forme d'un produit de deux sinusoïdes, l'une de fréquence proche de f et l'autre de fréquence très inférieure.
4) Montrer qu'en mesurant l'amplitude du signal reçu par le détecteur, on peut connaître la vitesse de la voiture. Discuter la précision que l'on peut atteindre.
5) **Effet Doppler :** Un détecteur (illicite...) est placé sur la voiture. Montrer que le signal reçu de l'onde incidente par ce détecteur est à une pulsation ω'' supérieure à ω. Pouvez-vous citer d'autres exemples de cet effet ? (penser aux ondes sonores émises par un objet en mouvement).